Multispektrale Farbfilterung mit Geometrischer Algebra

Bernhard Frei

Chromasens,
Max-Stromeyer-Straße 116, D-78467 Konstanz
eMail: bernhard.frei@chromasens.de
URL: http://www.chromasens.de

Zusammenfassung: Dieser Artikel beschreibt ein Verfahren zur Reduktion von Störungen im Farbbild, wie sie beim Scannen mit Zeilenscannern entstehen. Ziel dieses Filterverfahrens ist es, feine Details im Graukanal möglichst zu erhalten. Um dies zu erreichen ist die Wahl eines geeigneten Farbraums erforderlich. Die Zerlegung des Farbbildes in seine Komponenten erfolgt dabei mit Operationen aus dem reichhaltigen „Werkzeugkasten“ der Geometrischen Algebra.

1 Einleitung

Seit den Erkenntnissen von Young, Helmholz und der theoretischen Fundierung der Dreifarbtheorie durch Hermann Grassmann sind wir es gewohnt in verschiedenen dreidimensionalen Farbräumen zu denken und zu arbeiten.
Gewöhnlich liegen die technisch erfassten Farbinformationen als RGB-Komponenten vor und es ist naheliegend diese Komponenten zunächst als aufspannende Achsen in einem 3-dimensionalen Farbraum zu verwenden. Zu diesen auf drei Grundfarben basierenden Räumen gehören z.B. XYZ und sRGB. Sie haben zum einen den Nachteil, dass diese Räume mit unserer Sprache über Farbe nicht übereinstimmen, aber auch die physiologischen Grundgegebenheiten des Auges nicht abbilden. Dafür eignen sich besser die bekannten Farbräume HLS, HSV, HSI usw. besser.

Bei der Verarbeitung multispektraler Farbinformation "funktionieren" die gewohnten Abbildungen der auf dem HSV-Paradigma beruhenden Farbmodelle nicht mehr. Durch die physiologischen Gegebenheiten des Auges macht es aber auch in der multispektralen Welt weiter Sinn, die Stäbchen anregenden Grauempfindungen getrennt von den nicht grauen Empfindungen zu verarbeiten.

* * *

Einen alternativen Ansatz zum Arbeiten in n-dimensionalen Räumen wurde von Hermann Grassmann in seinem Buch die "Die lineale Ausdehnungslehre[1]" entwickelt. Das ursprüng-

liche Ziel der Grassmann-Algebra war es, eine Verallgemeinerung des Vektorbegriffs auf höhere Dimensionen zu entwickeln, um orientierte Flächenelemente, Volumina etc. beschreiben zu können.

Dieses äußere Produkt oder Dachprodukt ^ ist antisymmetrisch

$$a \wedge b = - b \wedge a$$

und erzeugt aus den Basiselementen $a = e_1$ und $b = e_2$ das neue Element $e_1 e_2$ oder in kompakter Schreibweise e_{12}.

Aus zwei ebenen Vektoren wird durch dieses Produkt ein flächenhaftes Element generiert, aus 3 Vektoren $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ entsteht ein Volumenelement.

Die zweite wichtige Grundoperation ist das Skalarprodukt

$$a \mid b = b \mid a$$

Im Gegensatz zum äußeren Produkt wirkt dieses dimensionsreduzierend. In der Geometrischen Algebra werden nun die äußere Algebra von Grassmann und die Quaternionen von Hamilton in einem gemeinsamen mathematischen Rahmen vereinigt. Die fundamentale Rolle in dieser Algebra spielt hier das Geometrische Produkt:

$$a\, b$$

Es verbindet das Skalarprodukt mit dem äußeren Produkt

$$a\, b = a \mid b + a \wedge b$$

Das Besondere an diesem Produkt ist seine Invertierbarkeit. Es enthält die komplette geometrische Beziehung von a relativ zu b.

Die Geometrische Algebra kann definiert werden über ihre Erzeugungsregeln

$$e_i^2 = 1,\ i = 1,2, \ldots ,n$$

$$e_i\, e_j + e_j\, e_i = 0,\ i \neq j$$

wobei $\{e_1, e_1, \ldots , e_n\}$ die kanonische Basis $\mathbb{R}_n$ bilden.

Die Geometrische Algebra $\mathbb{G}_n$ ist selbst wiederum ein Vektorraum der Dimension

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

mit der Basis

$$\{1,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ e_1\ e_2,\ e_1\ e_3,\ \ldots\ ,e_1\ e_n,\ldots\ ,\ \ e_1\ e_2\ \ldots\ e_n\}$$

Ein Element A in $\mathbb{G}_n$ wird gebildet aus

$$A = a_0 + a_{11}\, e_1 + \ldots + a_{1i}\, e_n + a_{21}\, e_1\, e_2 + \ldots a_{2i}\, e_1\ e_n + \ldots + a_{di}\, e_1\, e_2 \ldots e_n$$

wobei $d = 2^n - 1$ und $i = \binom{n}{p}$ für reale a_{pi}.

A ist in der Sprache der Geometrischen Algebra ein Multivektor und wird mit einem Großbuchstaben gekennzeichnet, die Elemente sind $a_n\ e_m \ldots e_k$ sind k-Spate.

2 Die Duale Repräsentation

Eine wichtige Eigenschaft der Geometrischen Algebra ist die einfache Möglichkeit der dualen Repräsentation eines Multivektors.

Die Erzeugung des dualen Elementes A^* erfolgt durch

$$A_k^* = A_k * I_n^{-1}$$

I_n ist der Pseudoscalar. Er ist das Basiselement des höchsten Grades. Für $\mathbb{G}_3$ ist dieser $I_3 = e_1\, e_2\, e_3$. Der inverse Pseudoscalar ergibt sich durch eine Reversion der Basiselemente:

$$I_n^{-1} = \tilde{I}$$

Wird ein Vektor in $\mathbb{G}_2$ mit $a = e_1 + 0.25\ e_2$ mit dem Inversen Pseudoscalar $I_2 = -\, e_1\, e_2$ multipliziert, ergibt das den um 90^0 Grad im Uhrzeigersinn gedrehten Vektor a*:

$$a^* = 0.25\ e_1 - e_2.$$

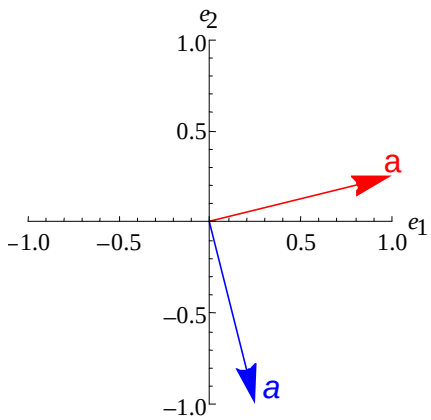

Abbildung 1: Duales Element in $\mathbb{R}_2$

Diese duale Repräsentation wird im $\mathbb{G}_n$ mit n >2 verwendet, um einen Unterraum zu erzeugen, in dem die farbbezogenen Filteroperationen wirksam werden.

3 Projektionen

In der Sprache der Geometrischen Algebra liegt der parallele Anteil des Vektors x dann im Unterraum von A wenn

$$x \wedge A = 0$$

Ausgehend von dieser Gleichung ergibt sich der Projektionsoperator für Multivektoren zu

$$P_A(X) = (X \mid A)\ A^{-1}$$

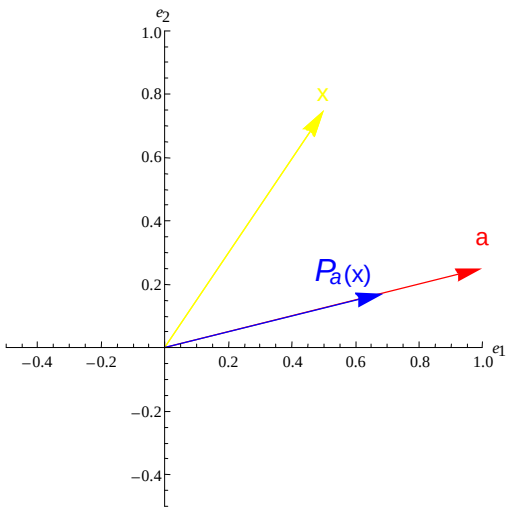

Abbildung 2: Wirkung der Projektion

In Abbildung 2 wird der Vektor x = $0.5\ e_1+0.75\ e_2$ auf den Vektor a = $e_1+0.25\ e_2$ projiziert. Das Ergebnis ist der zu a parallele Vektor $0.6875\ e_1+\ 0.171875\ e_2$.

3 Rejektion

Dieser Begriff wurde von dem US-amerikanischen Physiker David Hestenes geprägt und soll die Zurückweisung der zum Unterraum A parallelen Anteile andeuten. Dies wird ausgedrückt durch:

$$x \mid A = 0$$

Alle parallelen Anteile von x werden eliminiert. Dies führt zu der Gleichung:

$$R_A(X) = (X \wedge A)\ A^{-1}$$

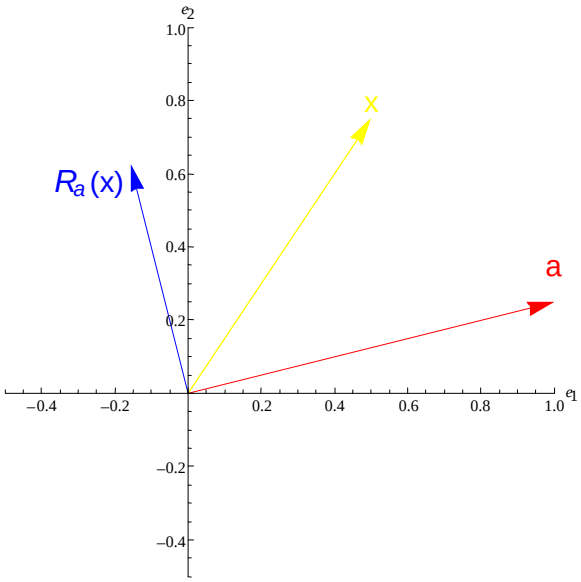

Abbildung 3: Wirkung der Rejektion

Bemerkenswert an diesen Formeln ist die Tatsache, dass der umgebende Raum nur indirekt durch die Einbettung des Spates A auftaucht. Der umgebende Raum spielt nur eine untergeordnete Rolle und die Projektion bzw. Rejektion hat in allen Räumen dieselbe Form.

4 Die homogene Repräsentation

Mit den bisherigen Betrachtungen können Operationen auf Richtungen durchgeführt werden. Wie in der klassischen Vektoralgebra gibt es in $\mathbb{G}_n$ keine Möglichkeit zwischen einem Ort und einer Richtung zu unterscheiden. In der Computeralgebra wird diese Unterscheidung durch die Einführung der homogenen Koordinaten erreicht. Diese haben eine "extra" Dimen-

sion für einen Vektor $\{v_1, v_2, v_3\}^T$ die zu der Vektor $\{v_1, v_2, v_3, 1\}^T$ führt**.** Es wird dabei der Euklidische Raum $\mathbb{R}_n$ einen Raum der Dimension $\mathbb{R}_{n+1}$ eingebettet. In der geometrischen Algebra wird über diese Erweiterung die Geometrische Algebra $\mathbb{G}_{n+1}$ errichtet.

Ein Punkt in $\mathbb{G}_{3+1}$ bekommt die zusätzliche Dimension e_o und damit die Basis $\{e_o, e_1, e_2, e_3\}$. Dieses homogene Vektormodell ist besonders geeignet für die Durchführung von Perspektivprojektionen. Damit lassen sich dann stereoskopische Aufgabenstellungen der Bildverarbeitung elegant behandeln. Im Kontext dieser Arbeit ist ein anderer Aspekt dieser Darstellung von besonderer Bedeutung: Es entsteht die Möglichkeit diese Vektoren mit Gewichten zu versehen. Die Rückführung nach $\mathbb{R}_n$ erfolgt durch Division des Vektors mit der e_o Komponente.

5 Baryzentrische Koordinaten

Die zusätzliche Dimension ermöglicht einem Punkt in $\mathbb{G}_{n+1}$ ein Gewicht zuzuordnen. Dies wird später bedeutsam, um Farborte entsprechend ihrer Relevanz zu addieren.

Sind die zwei Punkte p und q gegeben und sind diesen die Gewichte m_p und m_q zugeordnet, ergibt sich die Summe dieser Punkte:

$$p + q = (m_p (e_0 + p) + (m_q (e_0 + q)) = (m_p + m_q)\ e_o + (m_p\, p + m_q\, q)$$

Die Position des Vektors p + q ist dann

$$((m_p p + m_q q))/((m_p + m_q))$$

Dies ist äquivalent zur Berechnung des Schwerpunktes in $\mathbb{R}_n$. Diese einfache Zuordnung eines Gewichtes erlaubt eine elegante algorithmische Behandlung in dieser Repräsentation.

Mit normalisierten Punkten kann ein Punkt x durch die Punkte a, b, c eines Dreiecks dargestellt werden:

$$x = \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c$$

Mit den Operatoren der Geometrischen Algebra ergeben sich die Gewichte α, β, γ zu

$$\alpha = (x \wedge b)/(a \wedge b)\ ,\ \beta = (x \wedge a)/(b \wedge a)\ ,\ \gamma = 1 - x \wedge (b-a)/(a \wedge b)$$

Mit diesen speziellen Gewichten, auch unter dem Namen Baryzentrische Koordinaten bekannt, kann ein eine skalare Eigenschaft ϕx ausgedrückt werden

$$\phi x = \alpha\, \phi a + \beta\, \phi b + \gamma\, \phi c$$

Im Zusammenhang mit der Interpolation von Farbkoordinaten ist diese Darstellungsmöglichkeit von großer Bedeutung.

6 Zerlegung des Farbvektors

Das unten beschriebene Filterverfahren soll folgenden Vorgaben gerecht werden:

1. Unbunte Detailstrukturen im Bild sind unbedingt zu erhalten, da dies sonst zu einem Informationsverlust führen könnte.
2. Die mehrkanalige Farbinformation ist in Abwesenheit von Störungen zu erhalten.
3. Die Korrektur soll hardwarebasiert in Echtzeit durchzuführen sein.
4. Die Verarbeitung soll auf n Farbkanäle anwendbar sein.

Mit den oben genannten geometrischen Operationen wird die Farbinformation zunächst in einen parallelen und in einen senkrechten Anteil zur Grauachse G zerlegt. Die Buntebene senkrecht zur Grauachse ist hier das duale Element G* der Grauachse. Nachfolgend werden Punkte als Elemente der Geometrischen Algebra in fetten Kleinbuchstaben dargestellt, korrespondierende Farbkoordinaten in R^3 im Normaldruck:

$$G = e_1+e_2+e_3$$

$$G^* = -e_1e_2 + e_1e_3 - e_2e_3$$

G^* ist ein homogener Multivektor 2. Stufe; er beschreibt eine orientierte Fläche in $\mathbb{R}_3$, die den Ursprung enthält.
Der Grauanteil eines Farbvektors $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ ist dann

$$\mathbf{g} = P_G(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{3}[(e_1a_1)+(e_2a_1)+(e_3a_1)+(e_1a_2)+(e_2\ a_2)+(e_3\ a_2) +(e_1a_3)+(e_2a_3)+(e_3a_3)]$$

der Buntanteil

$$\mathbf{b} = R_G(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{b} = \tfrac{1}{3}[2e_1a_1-e_2a_1-e_3a_1-e_1a+2e_2a_2-e_3a_2-e_1a_3-e_2a+2e_3a_3]$$

Der ursprüngliche Vektor a ergibt sich wieder durch einfache Addition der Grau- und der Buntkomponente:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}$$

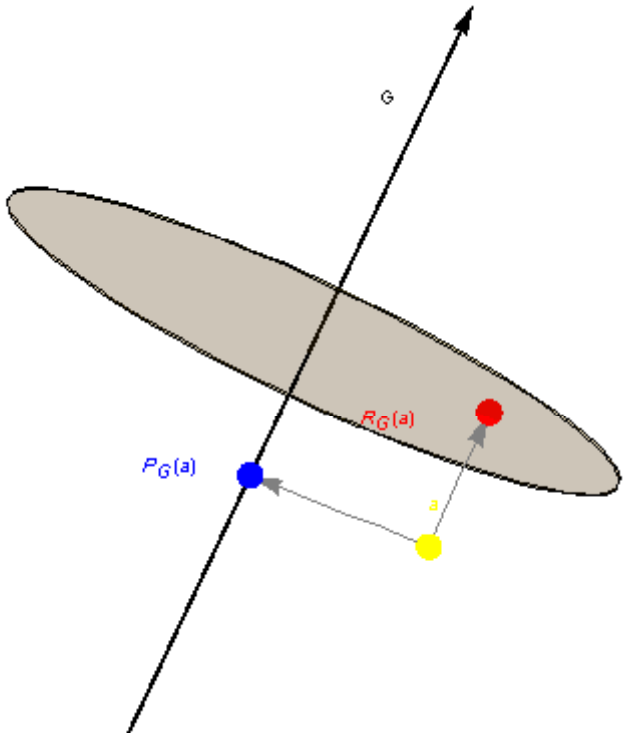

Abbildung 4: Projektion und Rejektion eines Farbwertes auf Grauachse und Buntebene

Diese Zerlegung beruht auf einer Idee von Sangwine, der diese Darstellung unter dem Titel "Gray-centered RGB color space" auf der CGIV 2004 vorgestellt hat [2]. Seine Darstellung verwendet noch keine Elemente der Geometrischen Algebra.
Ein weiterer Vorteil ist, dass keine trigonometrischen Funktionen beim Übergang in diese Darstellung notwendig sind. Da ebenfalls keine Wurzelfunktionen benötigt werden, erleichtert dies die hardwarebasierte Implementierung dieser Filteroperation erheblich.

7 Filterung in der Buntebene

Die Filterung in der Farbebene erfolgt dadurch, dass Pixel mit einem schlechten Störabstand durch die gewichteten Nachbarpixel ersetzt werden. Bei diesem Verfahren wird davon ausgegangen, dass das störende Rauschen in erster Linie durch das Photonenrauschen verursacht wird. Dieses kann durch eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, der Poisson-Verteilung, beschrieben werden. Diese wiederum zeichnet sich dadurch aus, dass die Varianz der Rauschamplitude zu dem Signalmittelwert proportional ist. Der Signal/Störabstand ist dann die Wurzel aus der Anzahl der beteiligten Elektronen μ multipliziert mit der Quanteneffizienz:

$$S/N_e = \sqrt{QE * \mu}$$

Wenn die Vollaussteuerung einer Beteiligung einer 50 000 e^- entspricht, ergibt sich bei einer Quanteneffizienz von 0.5 e^-/ Photon folgender Verlauf des Störabstandes:

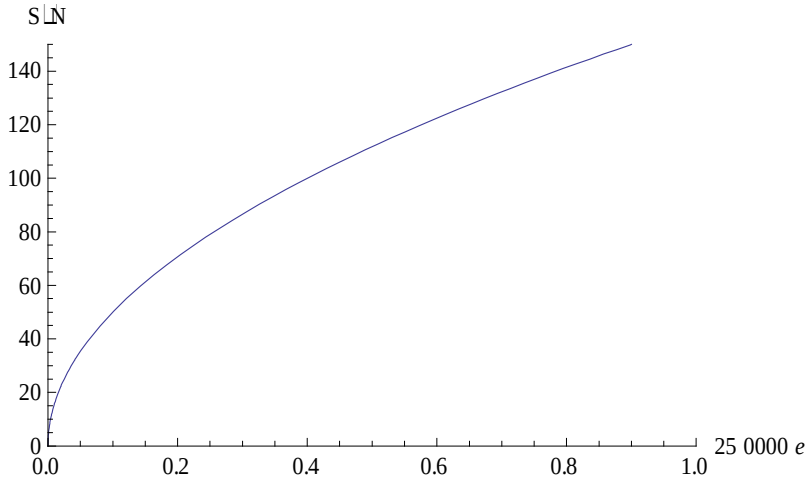

Abbildung 5: Verlauf des Störabstandes bei einer Quanteneffizienz von 0.5 e^-/ Photon

Als Gewichte für die Berechnung der neuen Position in der Buntebene werden die aus dem Mittelwert des Pixels geschätzten Störabstande verwendet.

b (x,y) ist der durch die Projektion bestimmte Punkt in der Bunteebene. Im homogenen Vektormodell $\mathbb{G}_{n+1}$, m+1,n+1 sind die Größen des Umgebungsfensters:

$$\mathbf{b}\ (x,y)_{filt} = \sum_{i=x-n/2,j=y-m/2}^{i=x+n/2,j=y+m/2} m(i,j)b(i,j)$$

$$\text{mit } m(i,j) = \sqrt{25.000 \cdot g(i.j)}$$

Die gefilterte Buntkomponente **b** $(x,y)_{filt}$ wird durch die Division mit der e_o Komponente normalisiert und zur Graukomponente g (x,y) addiert.

Abbildung 6: Lena links mit Rauschen, rechts gefiltert

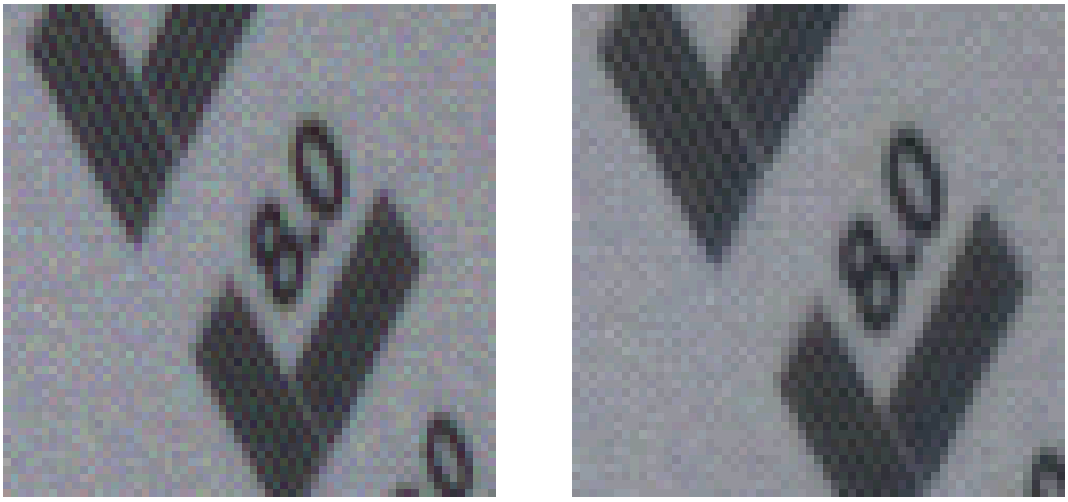

Abbildung 7: Mierengruppe an der Auflösungsgrenze; links mit Rauschen, rechts gefiltert

Literatur

[1] Grassmann Herrmann: Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig, 1878.

[2] Sangwine Stephen J.: Gray-centered RGB color space. In: Conference Proceedings, CGIV2004, Seite 183-186, 2004

[3] Dorst Leo: Geometrical Algebra for Computer Science, Verlag: Morgan Kaufmann, ISBN: 13:978-0-12-369465-2

[4] Perwass Christian: Geometric Algebra with Applications in Engineering, Verlag: Springer, ISBN: 978-3-540-899067-6

[5] Jung Florian: Geometrische Algebra und die Rolle des Clifford-Produkts in der Klassischen und Quantenmechanik, Diplomarbeit am Institut für Physik Mainz, 2006

[6] Hildenbrand Dietmar: Geometric Algebra and its Application to Computer Graphics In: EURO GRAPHICS, 2004